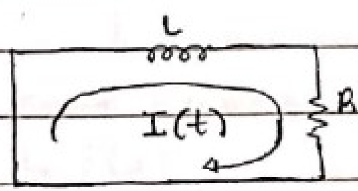
Aula 02 - Sistemas dinâmicos: definições

→ Sistema dinâmico:

sistema com características que variam no tempo, sendo geralmente modeladas por equações diferenciais (variação contínua) ou de diferenças (variação discreta).

exemplo: Circuito RL



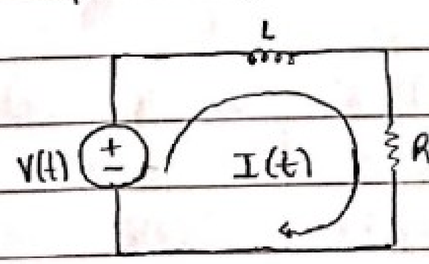
$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = 0$$

$$\dot{I} = \frac{RI}{L}$$

→ entrada:

elemento ou canal, geralmente externo ao sistema, capaz de influenciar a dinâmica do mesmo.

- entrada de controle
- perturbação / distúrbio / ruído

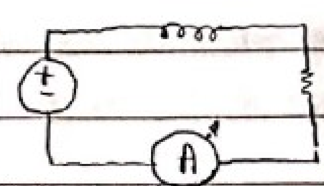


$$\dot{I} = \frac{RI}{L} - \frac{V}{L}$$

→ saída:

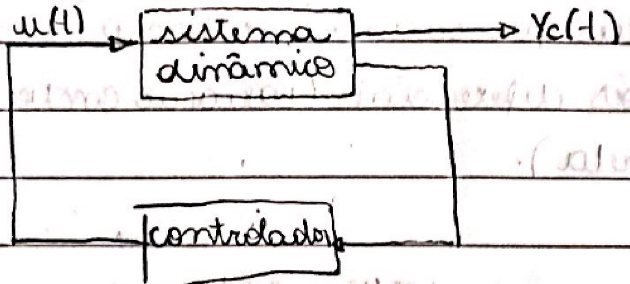
elemento ou canal sob o qual se tenha acesso no sistema, podendo ser medido diretamente por processo físico

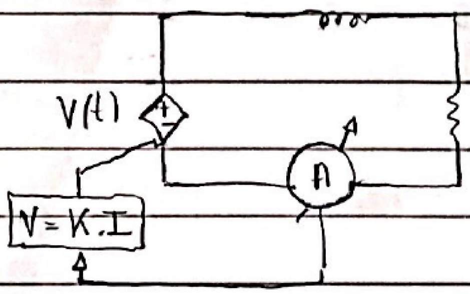
- saída controlada
- saída realimentada



→ sistema em malha fechada

sistema que utiliza uma saída realimentada para gerar a entrada de controle



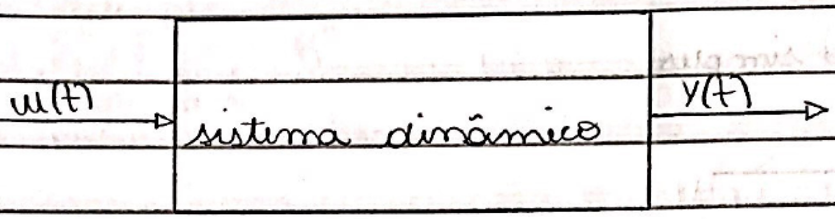


$$\dot{I} = \left(\frac{R-K}{L}\right) I$$

$$I(t) = e^{-\left(\frac{R-K}{L}\right)t}$$

Aula 03: funções de transferência 07.03.2018

1. modelagem de sistemas dinâmicos: funções de transferência



$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}[\cdot]} F(s)$ resp. impulso do sistema

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$D(F) = \{ s \in \mathbb{C} \,/\, F(s) \text{ existe} \}$ converge p/ um valor finito

→ algumas propriedades da transformada de laplace

i. $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s.F(s) - F(0)$ ou $f(0)$?

ii. $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$

iii. $\mathcal{L}[K.f(t)] = K.F(s)$

iv. $\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] + \mathcal{L}[g(t)]$

- obtenção da F.T. a partir da equação diferencial

exemplo: $a\dot{y} + by + (-u) = 0$

$\mathcal{L}[a\dot{y} + by - u] = 0$ não dá para aplicar laplace em eq. ñ lineares

$-aY(0) + s.a.Y(s) + b.Y(s) - U(s) = 0$

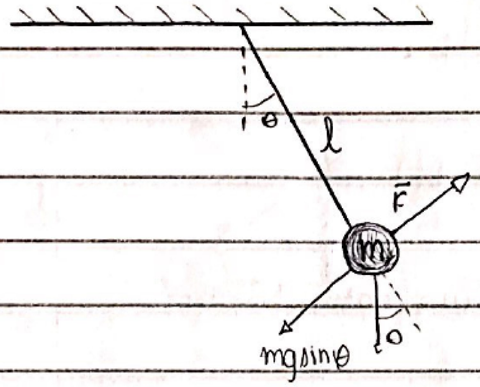
$[a.s + b]\,Y(s) = U(s) + Y(0).a$

temos que adotar, então, $Y(0) = 0$

$$Y(s) = \frac{1}{as+b} \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{as+b}$$

exemplo: pêndulo simples



$$J \cdot \ddot{\theta} = \sum_i T_i$$

$$ml^2 \cdot \ddot{\theta} = F \cdot l - m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot l$$

2. modelagem de sistemas dinâmicos: espaços de estado

definição: estado de um sistema é um conjunto de informações suficientes p/ caracterizar o sistema de forma completa

- representação : $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$x \rightarrow$ vetor de estado

$x_i,\ i = 1, \dots n \rightarrow$ variáveis de estado

- forma geral de um modelo de estados

equação de estado

$$\dot{x} = f(x, u),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r$$

$$y = g(x, u),\ y \in \mathbb{R}^q$$

equação de saída

$$\dot{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix}$$

portanto, leva a...

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p}_{\text{domínio}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

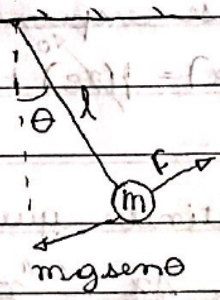
Aula 04: linearização de modelos em espaço de estados

forma geral de um modelo de estados

$$\dot{x} = f(x,u), \; x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^p$$

$$y = g(x,u), \; y \in \mathbb{R}^q$$

exemplo: pêndulo simples



$x_1 = \theta$

$x_2 = \dot{\theta}$

$F = u$

$\theta = y$

$$m l^2 \ddot{\theta} = Fl - mg \,\text{sen}\,\theta \cdot l$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F}{lm} - \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta$$

$$x_1 = \theta \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = \frac{u}{lm} - \frac{g}{l}\,\text{sen}\,x_1$$

$$y = \theta = x_1$$

portanto,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x_1 + \frac{u}{lm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$y = f(x_1) = x_1 \quad (2)$$

- linearização de modelos em espaço de estado

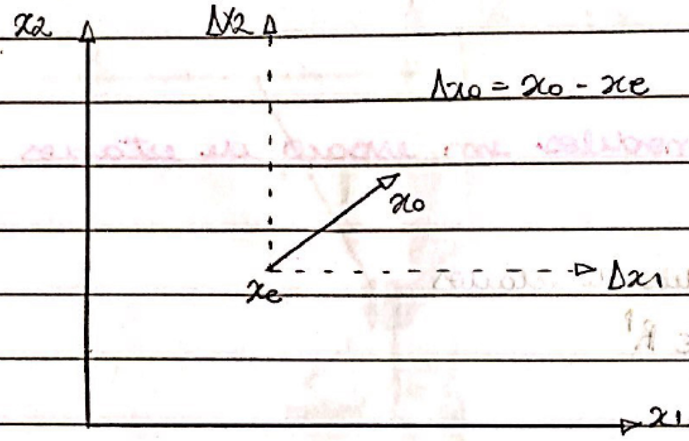
→ expansão truncada em série de Taylor

$\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$

admitindo

$\dot{x} = 0 = f(x_e)$

e definindo $\Delta x = x - x_e$,



pode-se expandir $f(x)$ em torno do ponto x_e:

$$f(x) = \cancel{f(x_e)}^{\,0} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_e} (x - x_e) + \ldots = A\Delta x + \ldots$$

admitindo que ~~x_0~~ não se afasta significativamente de x_e, tem-se Δx é "pequeno" e pode-se desprezar os termos de ordem superior a 1, ou seja:

$$f(x) \simeq A\Delta x$$

além disso,

$$\Delta\dot{x} = \frac{d}{dt}(x - x_e) = \dot{x}$$

e, com isso,

$$f(x) = \dot{x} = \Delta\dot{x} \simeq A\Delta x$$

portanto,

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x$$

é uma aproximação de $\dot{x} = f(x)$ numa vizinhança do ponto x_e

Aula 05: Relação entre F.T. e modelos em espaço de estados

→ forma geral de um modelo de estados (considerando entradas e saídas)

$\dot{x} = f(x, u)$, $x(0) = x_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$

$y = g(x, u)$, $y \in \mathbb{R}^q$

aplicando linearização por expansão truncada em série de Taylor:

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} ; A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} ; B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

(n → linhas, p → colunas)

$$C = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_e, u_e)} ; C \in \mathbb{R}^{q \times n}$$

$$D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{(x_e, u_e)} ; D \in \mathbb{R}^{q \times p}$$

exemplo:

$x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $u = F$, $y = \theta$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_2) \\ f_2(x_1, u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x_1 + \frac{1}{l.m} . u \end{bmatrix}$$

$$y = g(x_1) = x_1$$

obtenção do modelo linearizado:

1 cálculo do equilíbrio

$$0 = x_2$$

$$0 = -\frac{g}{l} . \operatorname{sen} x_{1e} + \frac{1}{lm} u_e$$

$u_e = \frac{glm}{l} \operatorname{sen} x_e \rightarrow u_e = mg \operatorname{sen} x_e$

② Cálculo dos Jacobianos

$$A = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(x_e, u_e)} & \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(x_e, u_e)} \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(x_e, u_e)} & \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(x_e, u_e)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cdot\cos x_e & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/lm \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$ ①

$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$ ②

é uma aproximação de

$\dot{x} = f(x, u)$

$y = g(x, u)$

em torno de um ponto x_e

aplicando a transformada de Laplace

$\mathcal{L}[\Delta\dot{x}] = \mathcal{L}[A\Delta x + B\Delta u]$

$s\,\Delta X(s) = A\,\Delta X(s) + B\,\Delta U(s)$

ñ existe: $(s - A)\,\Delta X(s) = B\,\Delta U(s)$

↳ $(sI - A)$

$\Delta U(s) =$

Aula 06 - diagrama de blocos

se

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

$$\Delta y = C\Delta x + D\Delta u$$

é uma aproximação linearizada de

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

numa vizinhança de um ponto de equilíbrio (x_e, u_e) então a função de transferência correspondente é:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

exemplo:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\theta_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/lm \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \Delta u$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{g}{l}\cos\theta_e & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + g/l\cos\theta_e} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -g/l\cos\theta_e & s \end{bmatrix}$$

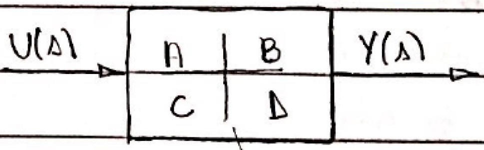
$$(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}\cos\theta_e} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -g/l\cos\theta_e & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/lm \end{bmatrix}$$

tilibra

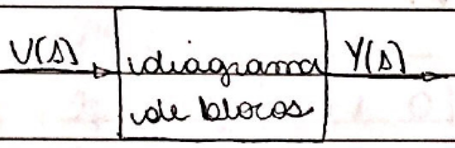
$$C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 + \frac{g}{l}\cos\theta e}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/lm \\ s/lm \end{bmatrix}$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \frac{1/lm}{s^2 + \frac{g}{l}\cos\theta e} \cdot \frac{1/lm}{1/lm} = \frac{1}{s^2 lm + mg\cos\theta e}$$

→ diagrama de blocos



f. transferência G(s)



- diagrama representa a equação $Y(s) = G(s)U(s)$
- certas relações físicas entre variáveis ficam mais evidentes.

exemplo 1:

$\dot{x} = -x + u \rightarrow sX(s) = -X(s) + U(s)$ (1)

$y = x \rightarrow Y(s) = X(s)$ (2)

substituindo (2) em (1):

$sY(s) = -Y(s) + U(s) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}\left[-Y(s) + U(s)\right]$

$$G(s) = \frac{1}{1+s}$$